

Fogalomtár

Vektorok

Definíció: A rendezett szám n -eseket n dimenziós vektoroknak nevezzük. A vektor elemeit koordinátáknak hívjuk.

Jelölésük: \underline{a} , \bar{a} , \vec{a} , \mathbf{a} . A sorba rendezett számokat sorvektornak, az oszlopba rendezetteket oszlopvektornak nevezzük.

$$\text{Pl.: } \mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3], \mathbf{b} = [-2 \ 3 \ 0]_{1 \times 3}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Speciális vektorok:

Nullvektor: Minden koordinátája zérus. $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Egységvektor: Az egyik koordinátája 1, a többi zérus. Ha az n -edik koordináta az 1, n -edik

egységvektornak nevezzük. Pl.: $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Összegzővektor: Minden koordinátája 1. Pl.: $\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vektorműveletek

Vektorok összege (különbsége): Csak azonos típusú vektorok esetében értelmezhető.

Az összegvektor (különbségvektor) koordinátái előállnak a megfelelő sorszámú koordináták összegeként (különbségeként).

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \quad \mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]; \quad \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = [a_1 \pm b_1 \ a_2 \pm b_2 \ a_3 \pm b_3]$$

Pl.: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Skálárral való szorzás: Az α valós számot skalárnak nevezzük. Egy vektor skalárszorosán a megfelelő koordináták skalárszorosából képzett vektort értjük.

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \quad \alpha \cdot \mathbf{a} = [\alpha \cdot a_1 \ \alpha \cdot a_2 \ \alpha \cdot a_3]$$

Pl.: $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

Skaláris szorzat: Két azonos dimenziójú vektor megfelelő koordinátái szorzatának összege.

Megjegyzés: Az eredmény skalár (nem vektor).

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \quad \mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Pl.: $[1 \ 0 \ -2] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -2$

Lineáris kombináció: Azonos típusú vektorok skalárszorosainak összege.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ azonos típusú vektorok, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n \in \mathbf{IR}$, ekkor a vektorok lineáris kombinációja:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i$$

$$\text{Pl.: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Mátrixok

Definíció: A mátrix egy olyan matematikai objektum, ahol a valós számok sorokba (m) és oszlopokba (n) vannak rendezve (m×n).

Jelölése: \underline{A} ; \mathbf{A} .

Típusa: A sorok és oszlopok száma (ebben a sorrendben).

Megjegyzés: A vektorok speciális, egy sorból vagy egy oszlopból álló mátrixok, így a vektorok összegére, különbségére, skalárral vett szorzatára ill. lineáris kombinációjára vonatkozó műveletek a mátrixok esetében is hasonlóan hajthatók végre.

$$\text{Pl.: } \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Speciális mátrixok:

Négyzetes mátrix: Olyan mátrix, melynek ugyanannyi sora, mint oszlopa van. Jele: \mathbf{A}_n . A négyzetes mátrix főátlóját az azonos sor- és oszlopindexű elemei alkotják: $a_{11}; a_{22}, \dots, a_{nn}$.

$$\text{Pl.: } \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Egység mátrix: Olyan négyzetes mátrix, melynek a főátlójában csupa 1-es, azon kívül pedig csak zérus szerepel. Így az egység mátrix különböző sorai (oszlopai) olyan egységvektorokból állnak, ahol az első sora (oszlopa) az első, a második sora (oszlopa) a második egységvektor, és így tovább.

$$\text{Pl.: } \underline{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonális mátrix: Olyan négyzetes mátrix, melynek csak a főátlójában szerepelnek zérustól különböző számok.

$$\text{Pl.: } \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Szimmetrikus mátrix: Olyan négyzetes mátrix, melynek tetszőleges elemére teljesül, hogy $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\text{Pl.: } \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ferdén szimmetrikus mátrix: Olyan négyzetes mátrix, melynek tetszőleges elemére teljesül, hogy $a_{ij} = -a_{ji}$, $i \neq j$.

Pl.: $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Alsó (felső) háromszögmátrix: Olyan négyzetes mátrix, melyben a főátló felett (alatt) az összes elem zéró.

Pl.: $\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Inverzmátrix: Olyan négyzetes mátrix (ha létezik), melyet az eredeti mátrixszal megszorozva (jobbról vagy balról), azokkal azonos típusú egységmátrixot kapunk.

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$$

Pl.: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array} \right)$

Mátrixműveletek:

Megjegyzés: A vektorok speciális, egy sorból vagy oszlopból álló mátrixok, így a vektorok összegére, különbségére, skalárral vett szorzatára ill. lineáris kombinációjára vonatkozó műveletek a mátrixok esetében is hasonlóan hajthatók végre.

Mátrix transzponáltja: Sorai és oszlopai felcserélésével keletkező mátrix. Jele: \underline{A}^* .

Pl.: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \rightarrow \underline{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

Összeg-, különbségmátrix: Elemei az azonos típusú mátrixok megfelelő elemeinek összege, különbsége.

Pl.: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Mátrix skalárszorosa: Elemei a mátrix elemeinek skalárszorosa.

Pl.: $3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 9 & -15 & 3 \end{bmatrix}$

Mátrix szorzása vektorral: Meg kell különböztetni a vektorral vett baloldali és jobboldali szorzást. Balról csak megfelelő típusú sorvektorral, jobbról csak megfelelő típusú oszlopvektorral lehet szorozni. Az első esetben az eredmény sorvektor, a második esetben oszlopvektor.

$$\underline{a}_{1 \times m} \cdot \underline{A}_{m \times n} = \underline{b}_{1 \times n} \quad \underline{A}_{m \times n} \cdot \underline{a}_{n \times 1} = \underline{b}_{m \times 1}$$

A szorzatmátrix elemeit a megfelelő sor- és oszlopvektor skaláris szorzata adja.

Pl.: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

Érdemes szorzásnál a Falk sémát alkalmazni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

Mátrixok szorzata: Megfelelő típusú mátrixokat lehet csak összeszorozni:

$\mathbf{A}_{r \times m} \cdot \mathbf{B}_{m \times n} = \mathbf{C}_{r \times n}$. A szorzás általában nem kommutatív, sőt fordított sorrendben nem is végrehajtható. (Kommutatív a szorzás négyzetes mátrix inverzével való megszorzása esetén.) A szorzatmátrix elemei a szorzó és szorzandó mátrixok megfelelő sor- és oszlopvektorainak skaláris szorzata. Itt is érdemes alkalmazni a Falk sémát:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$